FICHE METHODE
Prouver la dérivabilité d'une fonction

Problème à résoudre

➊

Enoncé

Connaissant l'expression d'une fonction f en fonction de la variable x (ou d'autres fonctions de x dérivables), prouver que f est dérivable en x.

Commentaire

Prouver que f est dérivable en x, c'est prouver que son taux de variation t(h) en x tend vers un nombre réel fini lorsque h tend vers 0. Donc, souvent, en prouvant la dérivabilité, on trouve aussi la dérivée qui est justement, par définition, la limite du taux de variation.

Toutefois, on n'utilise cette méthode de calcul de la dérivée que pour prouver un certain nombre de théorèmes et formules "de base" et, ensuite, on calcule toujours les dérivées à partir de ces formules apprises par cœur, c'est beaucoup plus simple.

Méthode

➋

Idée de la méthode

Pour prouver la dérivabilité, **on applique la définition de la dérivée** et **on explicite le taux de variation** t(h) de la fonction en x, en cherchant à le mettre sous une forme qui permet de facilement **voir s'il tend vers un nombre réel fini quand h tend vers 0**.

Description de la méthode

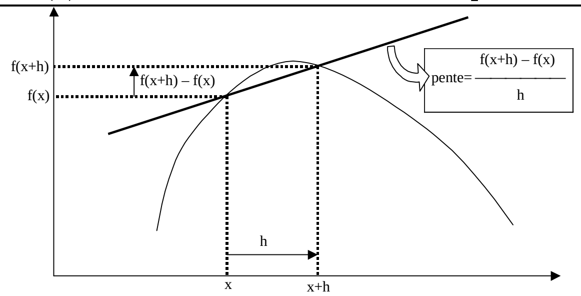
1) On considère 2 abscisses : x et x + h, où h tend vers 0.

2) on calcule le taux de variation de la fonction en x, égal par définition à : $t(h) = \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$;

3) Dans t(h), on remplace f(x+h) et f(x) par leurs expressions connues et on simplifie le plus possible la fraction.

4) Il faut aboutir à une forme où l'on ne divise plus par h (puisqu'on ne peut pas diviser par 0). **Si la simplification de la fraction ne suffit pas, il faut trouver une autre forme qui permette de voir si t(h) tend vers un nombre réel fini lorsque h tend vers 0**.

➌



Exemple d'application

Données

La fonction f est définie par $f(x) = \sqrt{x}, x \in R^{+}$. Prouver qu'elle est dérivable au point x=2.

❶ **Résolution**

1) On considère deux abscisses : 2 et 2+h.

2) Le taux de variation de f en 2 est : $t(h) = \dfrac{\sqrt{2+h} - \sqrt{2}}{h}$. On ne peut pas simplifier davantage la fraction.

3) Sous cette forme, on ne voit pas ce qui se passe quand h tend vers 0 car à la fois le dénominateur et le dénominateur tendent vers 0 et on ne peut pas conclure ; il faut donc transformer la fraction. L'astuce classique consiste à multiplier le numérateur et le dénominateur par $\sqrt{2+h} + \sqrt{2}$ et à utiliser l'identité remarquable (a-b)(a+b)=a²-b² :

$$t(h) = \frac{(\sqrt{2+h} - \sqrt{2})(\sqrt{2+h} + \sqrt{2})}{h(\sqrt{2+h} + \sqrt{2})} = \frac{(2+h) - 2}{h(\sqrt{2+h} + \sqrt{2})}$$

d'où :

❷

$$t(h) = \frac{h}{h(\sqrt{2+h} + \sqrt{2})} = \frac{1}{(\sqrt{2+h} + \sqrt{2})}.$$

Sous cette forme, quand h tend vers 0, le dénominateur tend vers $2\sqrt{2}$, donc t(h) tend vers la limite $\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$.

En conséquence f(x) est bien dérivable en x=2 et l'on peut même dire que sa dérivée en ce point est :

$$f'(2) = \frac{1}{2\sqrt{2}}.$$

Vérification

Il n'y a pas de vérification simple à effectuer. Connaissant la forme de la courbe de la fonction f, tout au plus peut on être rassuré par le fait de trouver que sa tangente en x = 2 à une pente positive…

❸