FICHE METHODE
Trouver l'équation d'une droite en géométrie vectorielle plane

Problème à résoudre

❶

Enoncé

Dans un repère $(O;\vec{i};\vec{j})$, deux points **distincts** A(x_A, y_A) et B(x_B;y_B) sont donnés par leurs coordonnées. Il est demandé de trouver l'équation de la droite passant par ces deux points.

Commentaire

1/ Il y a plusieurs façons de trouver l'équation demandée. Cette fiche expose la *méthode vectorielle*.

2/ Attention à ne pas se lancer dans des calculs inutiles : si les deux points ont même abscisse (x_A=x_B), alors l'équation de la droite est x=x_A ; s'ils ont même ordonnée (y_A=y_B), l'équation de la droite est y=y_A.

Méthode

❷

Idée de la méthode

La droite cherchée est l'ensemble des points M(x,y) tels que $\overrightarrow{AM}$ soit colinéaire à $\overrightarrow{AB}$: $\overrightarrow{AM} = \lambda.\overrightarrow{AB}, \lambda \in R$. A chaque valeur de λ correspond une position de M sur la droite et donc un couple de valeurs de x et y qui dépendent de λ. Pour obtenir l'équation de la droite, il faut éliminer λ pour trouver une relation entre x et y.

❸

Description de la méthode

L'équation vectorielle de la droite est $\overrightarrow{AM} = \lambda.\overrightarrow{AB}, \lambda \in R$.

Remplaçons les vecteurs par leurs expressions sous forme de coordonnées :

$$\begin{pmatrix} x - x_A \\ y - y_A \end{pmatrix} = \lambda.\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}, \lambda \in R.$$

Cette unique égalité vectorielle est équivalente à l'ensemble des deux équations scalaires suivantes :

$$\begin{cases} x - x_A = \lambda(x_B - x_A) \\ y - y_A = \lambda(y_B - y_A) \end{cases}, \text{ avec } \lambda \in R.$$

Si les deux points ont même abscisse (x_A=x_B), alors l'équation de la droite est x=x_A ; s'ils ont même ordonnée (y_A=y_B), l'équation de la droite est y=y_A. Dans les autres cas (x_A-x_B) et (y_A-y_B) sont tous deux non nuls et les deux équations scalaires peuvent s'écrire :

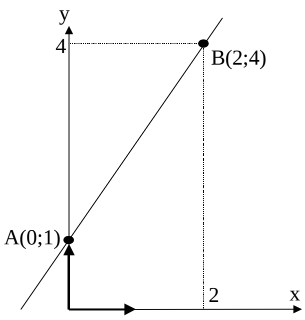
❶ $$\begin{cases} \dfrac{x - x_A}{x_B - x_A} = \lambda \\ \dfrac{y - y_A}{y_B - y_A} = \lambda \end{cases}, \text{ avec } \lambda \in R.$$

L'équation de la droite s'obtient en comparant les deux expressions de λ :

$$\frac{y - y_A}{y_B - y_A} = \frac{x - x_A}{x_B - x_A}.$$

Exemple d'application

<u>Données</u>

❷ 

A(0;1) et B(2;4)

<u>Résolution</u>

La droite (AB) est l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM} = \lambda.\overrightarrow{AB}, \lambda \in R$ c'est à dire tels que :

$$\begin{pmatrix} x - 0 \\ y - 1 \end{pmatrix} = \lambda.\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \lambda \in R.$$

Cette équation vectorielle est équivalente au système suivant :

$$\begin{cases} x = 2\lambda \\ y - 1 = 3\lambda \end{cases}, \lambda \in R \text{ d'où } \lambda = \frac{x}{2} \quad et \quad \lambda = \frac{y-1}{3}, \lambda \in R.$$

<u>L'équation de la droite (AB) est donc :</u>

❸ $$\frac{y-1}{3} = \frac{x}{2} \text{ c'est-à-dire : } y = \frac{3}{2}x + 1.$$

<u>Vérification</u>

Sur le graphique : 1 est bien l'ordonnée à l'origine et quand x augmente de 2, y augmente de 3.