

FICHE METHODE
Trouver la mesure principale d'un angle orienté

Problème à résoudre

Enoncé

On donne une mesure α d'un angle orienté. On demande de trouver la valeur θ de la mesure principale de cet angle.

Commentaire

Par définition, parmi toutes les mesures d'un même angle (qui diffèrent d'un multiple entier relatif de 2π), la mesure principale est la seule qui appartient à l'intervalle $]-\pi; \pi]$.

Méthode

Idée de la méthode

Pour trouver la mesure principale, il faut retirer $2k\pi$ à la mesure donnée. Pour trouver k , on va l'encadrer entre deux nombres, en partant de la définition de la mesure principale.

Description de la méthode

a) Il faut commencer par regarder si la mesure donnée α est dans $]-\pi; \pi]$. Si c'est vrai, l'exercice est terminé ; c'est la mesure principale.

b) Dans le cas contraire, on sait qu'elle se déduit de la mesure principale θ en ajoutant $2k\pi$: $\alpha = \theta + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$

Pour le moment, k est inconnu.

c) De cette égalité, on déduit que la mesure principale θ cherchée vérifie : $\theta = \alpha - 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$, k encore inconnu.

d) Par définition de la mesure principale : $\theta \in]-\pi; \pi]$ donc k vérifie nécessairement : $-\pi < \alpha - 2k\pi \leq \pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

e) On va appliquer à cette double inégalité toujours la même suite de transformations pour arriver à un encadrement de k :

(i) division des trois nombres par π : $-1 < \frac{\alpha}{\pi} - 2k \leq 1$

(ii) soustraction aux trois nombres de α/π : $-1 - \frac{\alpha}{\pi} < -2k \leq 1 - \frac{\alpha}{\pi}$

(iii) division des trois nombres par (-2) et donc changement de sens

des inégalités : $\frac{-1 - \frac{\alpha}{\pi}}{-2} > k \geq \frac{1 - \frac{\alpha}{\pi}}{-2}$ soit : $\left(\frac{\alpha}{2\pi}\right) + \frac{1}{2} > k \geq \left(\frac{\alpha}{2\pi}\right) - \frac{1}{2}$.

f) L'entier relatif k doit ainsi être dans un intervalle de longueur 1 donc l'inégalité encadrée est satisfaite par un seul entier k . En utilisant cette valeur, on trouve la mesure principale $\theta = \alpha - 2k\pi$.

Exemple d'application

Données

On donne la mesure $\alpha = \frac{43\pi}{13}$ d'un angle. Trouver sa mesure

principale θ .

Résolution

a) $43/13$ est plus grand que 1 donc cette mesure n'est pas principale

b) On sait que : $\frac{43}{13}\pi = \theta + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$

c) donc $\theta = \frac{43}{13}\pi - 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$, inconnu

d) et, par définition : $-\pi < \frac{43}{13}\pi - 2k\pi \leq \pi$

e) les trois transformations :

(i) division par π : $-1 < \frac{43}{13} - 2k \leq 1$

(ii) soustraction de $43/13$: $-1 - \frac{43}{13} < -2k \leq 1 - \frac{43}{13}$

c'est-à-dire : $-\frac{56}{13} < -2k \leq -\frac{30}{13}$

(ii) division par -2 : $\frac{28}{13} > k \geq \frac{15}{13}$

f) le seul entier relatif k vérifiant cette double inégalité est :

$$k = \frac{26}{13} = 2,$$

donc la mesure principale est :

$$\theta = \frac{43}{13}\pi - 2 \cdot 2 \cdot \pi = \frac{43}{13}\pi - 4 \frac{13}{13}\pi = -\frac{9}{13}\pi.$$

Vérification

La valeur trouvée est bien dans $]-\pi; \pi]$.