FICHE METHODE
Ecrire l'équation de la tangente à une courbe

Problème à résoudre

❶ **Enoncé**

Soit $\mathcal{C}$ la courbe d'équation $y = f(x)$ et T_a la tangente à cette courbe au point M_a d'abscisse x=a. La fonction f est supposée dérivable au point a.

Trouver l'équation de la droite T_a.

Méthode

Idée de la méthode

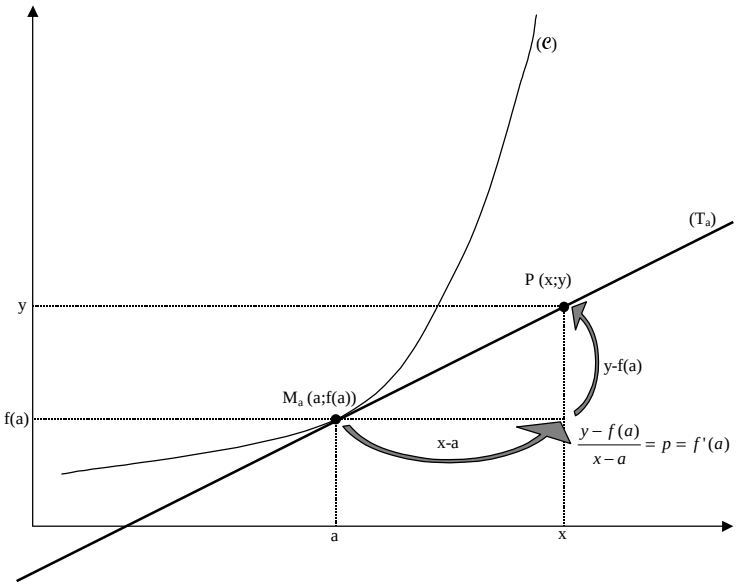
On sait que la tangente passe T_a par le point M_a et que, par définition, elle a la même pente que la courbe $\mathcal{C}$ en M_a.

Description de la méthode

Puisque M_a appartient à $\mathcal{C}$, ses cordonnées sont $(a;\ f(a))$.

Lorsque x=a, le point P(x,y) courant de la tangente T_a devient confondu avec M_a donc son ordonnée devient $y = f(a)$.

❷



❸ Lorsque P(x,y) n'est pas confondu avec M(a;f(a)), la pente de la droite (aussi appelée "coefficient directeur") est la constante p donnée par $p = \dfrac{y - f(a)}{x - a}$. Or la pente de la tangente T_a est celle de la courbe en M_a, qui est donnée par la dérivée de f en a : $p = f'(a)$.

En définitive, l'équation de la tangente est donc :

$$\frac{y-f(a)}{x-a}=f'(a)$$ c'est-à-dire $\boxed{y-f(a)=f'(a)(x-a)}$

ou encore $\boxed{y=f'(a).x-f'(a).a+f(a)}$.

❶ L'ordonnée à l'origine de la tangente T_a est ainsi :

$$-f'(a).a+f(a).$$

Remarque : il est plus facile de se rappeler l'équation de la tangente sous la forme équivalente :

$$y-f(a)=f'(a).(x-a).$$

Exemple d'application

Données

Donner l'équation de la tangente au point M d'abscisse a à la courbe d'équation $y=x^4$.

Résolution

Le point M a pour coordonnées (a ; a^4).

La dérivée de la fonction définissant la courbe est $y'=4x^3$ donc la pente de la courbe en a est : $4a^3$.

Pour tout point P(x;y) de la tangente, la pente **de la droite** est

❷ donnée par : $p=\frac{y-a^4}{x-a}$. Et cette pente est égale à celle de la courbe en M, soit $4a^3$.

L'équation de la tangente en a est donc :

$\frac{y-a^4}{x-a}=4a^3$, d'où $y-a^4=4a^3(x-a)$

c'est-à-dire : $y=4a^3(x-a)+a^4$

ou encore : $y=4a^3x-4a^4+a^4$

d'où finalement : $\boxed{y=4a^3x-3a^4}$.

Vérification

Le coefficient directeur de la droite est la pente de la courbe $4a^3$.

Et, pour x=a, on trouve $\boxed{y=4a^3a-3a^4=4a^4-3a^4=a^4}$

❸ donc le point de la droite est bien sur la courbe.