

Transformation de Fourier rapide

Définition

Soit $x(t)$ un signal discrétisé connu aux T instants $t=0$ à T , T étant supposé être égal à une puissance entière de 2.

Sa transformée de Fourier rapide (TFR) est définie par :

$$X(k) = \frac{1}{T} \sum_{t=0}^{T-1} x(t) \exp(-2i\pi k \frac{t}{T}), \text{ aux } T \text{ fréquences } k=0 \text{ à } T-1.$$

Remarques :

- ♦ 1. La définition de la transformée de Fourier peut varier, selon les auteurs, d'une constante multiplicative. Le choix fait ici (facteur $1/T$) assure que $X(0)$ est la moyenne du signal et entraîne que la transformée de Fourier inverse se calcule par :

$$x(t) = \sum_{k=0}^{T-1} X(k) \exp(2i\pi k \frac{t}{T})$$

- ♦ 2. Dans le cas d'un signal connu en deux instants $t=0$ et $t=1$, soit x_0 et x_1 , la définition ci-dessus implique que la transformée de Fourier est connue en deux fréquences par :

$$X_0 = \frac{1}{2}(x_0 + x_1) \text{ et } X_1 = \frac{1}{2}(x_0 - x_1).$$

On vérifie que la transformée de Fourier inverse redonne bien le signal :

$$x(t) = \frac{1}{2}(x_0 + x_1) + \frac{1}{2}(x_0 - x_1) \exp(i\pi t) \text{ pour } t=0 \text{ et } 1.$$

Principe du calcul rapide de la transformation

L'hypothèse faite sur T permet de poser $T=2N$, où l'entier naturel N est une puissance de 2.

L'algorithme de calcul rapide de la transformée de Fourier repose sur la séparation des instants de mesure du signal en deux séries :

- ♦ les instants pairs, $t = 2n$,
- ♦ les instants impairs, $t = 2n + 1$,

où n varie de 0 à $\frac{T-2}{2} = N-1$.

En effet, il est possible d'écrire, pour $k=0, \dots, T-1$:

$$\begin{aligned} X(k) &= \frac{1}{T} \sum_{n=0}^{N-1} \left\{ \begin{array}{l} x(2n) \exp(-2i\pi k \frac{2n}{2N}) \\ + x(2n+1) \exp(-2i\pi k \frac{2n+1}{2N}) \end{array} \right\} \\ &= \frac{1}{T} \left\{ \begin{array}{l} \sum_{n=0}^{N-1} x(2n) \exp(-2i\pi k \frac{n}{N}) \\ + \exp(-i\pi \frac{k}{N}) \sum_{n=0}^{N-1} x(2n+1) \exp(-2i\pi k \frac{n}{N}) \end{array} \right\}. \end{aligned}$$

En introduisant une notation particulière pour les points pairs et impairs :

$$x^p(n) = x(2n) \text{ et } x^i(n) = x(2n+1),$$

cette égalité peut s'écrire :

$$X(k) = \frac{1}{2} \left\{ \begin{aligned} & \left[\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x^p(n) \exp(-2i\pi k \frac{n}{N}) \right] \\ & + \exp(-i\pi \frac{k}{N}) \left[\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x^i(n) \exp(-2i\pi k \frac{n}{N}) \right] \end{aligned} \right\} \text{ pour } k=0, \dots, 2N-1.$$

Pour interpréter les termes entre crochets, deux cas doivent être distingués :

- ♦ pour $k = 0, \dots, N-1$, ces termes sont simplement les transformées de Fourier des séquences de points pairs, d'une part, et impairs, d'autre part ;
- ♦ pour $k = N, \dots, 2N-1$, il suffit de poser $k = N + f$, $f = 0, \dots, N-1$ et de constater qu'il est possible d'écrire : $\exp(-i\pi \frac{k}{N}) = \exp(-i\pi \frac{N+f}{N}) = -\exp(-i\pi \frac{f}{N})$, d'une part, et, d'autre part : $\exp(-2i\pi \frac{k}{N}) = \exp(-2i\pi \frac{N+f}{N}) = \exp(-2i\pi \frac{f}{N})$.

En récapitulant, avec $f = 0, \dots, N-1$, la transformée de Fourier peut finalement être calculée en deux fois par :

$$X(f) = \frac{1}{2} \left\{ \begin{aligned} & \left[\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x^p(n) \exp(-2i\pi f \frac{n}{N}) \right] \\ & + \exp(-i\pi \frac{f}{N}) \left[\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x^i(n) \exp(-2i\pi f \frac{n}{N}) \right] \end{aligned} \right\},$$

$$X(N+f) = \frac{1}{2} \left\{ \begin{aligned} & \left[\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x^p(n) \exp(-2i\pi f \frac{n}{N}) \right] \\ & - \exp(-i\pi \frac{f}{N}) \left[\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x^i(n) \exp(-2i\pi f \frac{n}{N}) \right] \end{aligned} \right\}.$$

Ces expressions montrent que la transformée $X(k)$ de longueur $T=2N$ peut être calculée à partir des deux transformées de Fourier de longueur N des séries de points pairs et impairs respectivement ; en posant :

$$X_N^p(f) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x^p(n) \exp(-2i\pi f \frac{n}{N}) \quad \text{et } X_{2N} = X,$$

$$X_N^i(f) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x^i(n) \exp(-2i\pi f \frac{n}{N})$$

l'expression de la transformée de Fourier cherchée devient :

$$X_{2N}(f) = \frac{1}{2} \left\{ X_N^p(f) + \exp(-i\pi \frac{f}{N}) X_N^i(f) \right\}$$

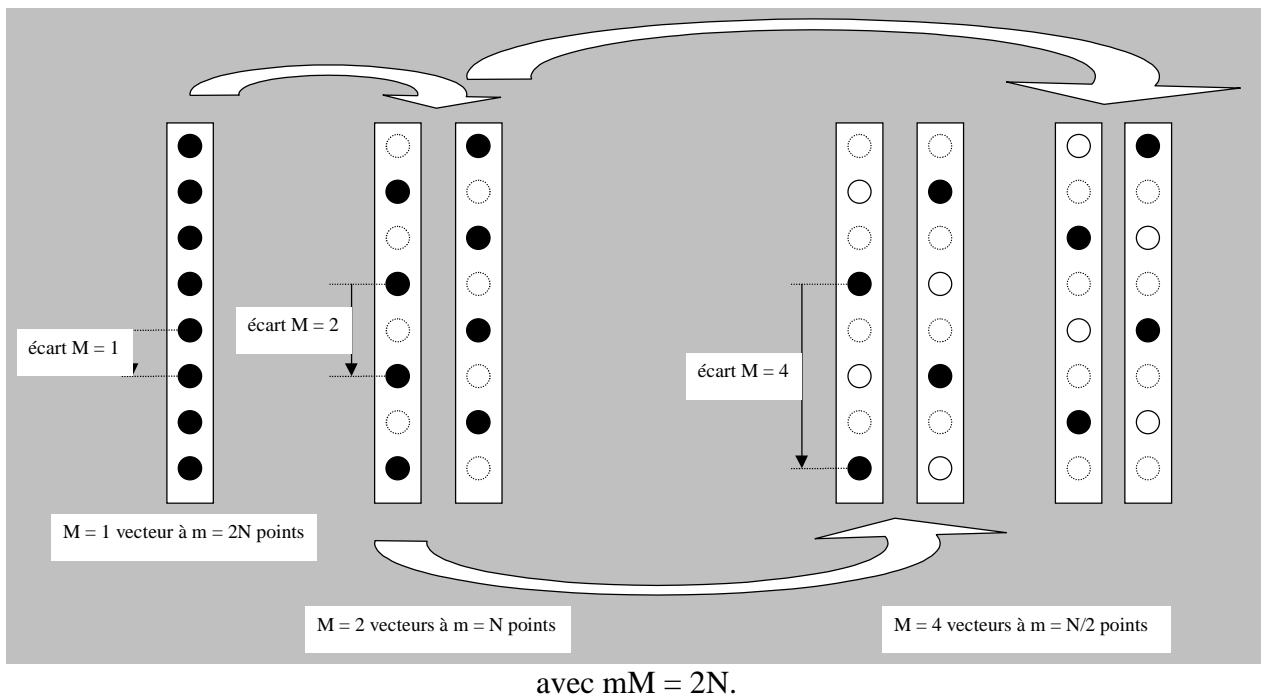
$$X_{2N}(N+f) = \frac{1}{2} \left\{ X_N^p(f) - \exp(-i\pi \frac{f}{N}) X_N^i(f) \right\}.$$

Puisque que le même raisonnement peut être appliqué aux transformations de Fourier de longueur N, cette expression montre que la TFR peut se calculer par récurrence à partir des N transformées de Fourier de longueur 2. Il existe des implémentations très compactes d'algorithmes de calcul de ces expressions. Celui présenté ci-dessous a l'avantage de la clarté mais l'inconvénient de consommer de la mémoire pour stocker les calculs intermédiaires.

Un algorithme de calcul

Principe

L'idée de base découle de l'observation que la sélection des séquences paires et impaires a pour effet de diviser par 2 le nombre de points qui les constituent en doublant l'intervalle de séparation entre eux, comme l'indique le schéma suivant.



- En remontant la chaîne de droite à gauche, il apparaît que le calcul s'effectue
- ♦ en initialisant le vecteur par les $M=N$ transformées de Fourier à $m=2$ points séparés par un intervalle de longueur $M=N$,
 - ♦ puis en calculant les $M=N/m$ transformées à $2m$ points séparés de N/m à partir des $M=2N/m$ transformées à m points séparés de $2N/m$, pour $m=2$ à N ; lorsque deux transformées à m points ont été utilisées, elle ne servent plus et il est donc possible de stocker les résultats du calcul de la transformée à $2m$ points dans la place qu'elles occupaient dans le même tableau ; à chaque étape, comme tous les calculs de transformées à $2m$ points sont indépendants, il est possible de les effectuer en parcourant le tableau de haut en bas dans son ordre naturel.

Initialisation

Il y a N transformées de Fourier à 2 points. La $j^{\text{ème}}$ est donnée par :

$$X_{2,j}(0) = \frac{1}{2} [x(j) + x(j+N)]$$

$$X_{2,j}(0) = \frac{1}{2} [x(j) - x(j+N)]$$

, pour $j=0, \dots, N-1$,

Soit Tab le vecteur de travail contenant les intermédiaires de calcul. Les deux amplitudes complexes de la $j^{\text{ème}}$ transformée à 2 points sont respectivement rangées en Tab(j) et Tab(j+N).

Boucle de calcul

A chaque étape, on part des M transformées de Fourier à m points connues et on calcule les M/2 transformées à 2m points, pour m=2, ..., N. La $s^{\text{ème}}$ transformée à 2m points, avec s=0, ..., (M/2)-1, est calculée à partir de deux transformées à m points :

- ◆ la $s^{\text{ème}}$ $X_{m,s}(f)$, rangée en Tab(s), Tab(s+M), ..., Tab(s+(m-1)M)
- ◆ la $(s+M/2)^{\text{ème}}$ $X_{m,(s+M/2)}$, rangée en Tab(s+M/2), Tab(s+M/2+M), ..., Tab(s+M/2+(m-1)M)

$$\begin{aligned} X_{2m,s}(f) &= \frac{1}{2} \left\{ X_{m,s}(s) + \exp(-i\pi f \frac{f}{m}) X_{m,s+\frac{m}{2}}(f) \right\} \\ \text{par :} \quad X_{2m,s}(m+f) &= \frac{1}{2} \left\{ X_{m,s}(s) - \exp(-i\pi \frac{f}{m}) X_{m,s+\frac{m}{2}}(f) \right\}, \quad \underline{f=0, \dots, m-1} \end{aligned}$$

et le résultat est rangé respectivement en Tab(s+f.M/2) et Tab(s+(m+f)M/2) pour f=0 à m-1, c'est-à-dire en :

Tab(s), Tab(s+M/2), ..., Tab(s+(m-1)M/2), Tab(s+m.M/2), Tab(s+(m+1)M/2), ..., Tab(s+(2m-1)M/2).

Le calcul s'effectue donc avec trois boucles imbriquées :

- ◆ sur m, de 2 à N, avec M=2N/m,
- ◆ sur s de 0 à (M/2)-1,
- ◆ sur f de 0 à m-1.

En réalité, ce calcul est effectué en séparant parties réelles et imaginaires, en posant Tab(f)=Tab_r(f)+i.Tab_i(f). Les formules qui permettent de passer d'un état du tableau au suivant sont :

$$\begin{aligned} \begin{cases} Tab_r(s + f \cdot \frac{M}{2}) = \frac{1}{2} \left\{ Tab_r(s + fM) + Tab_r(s + \frac{M}{2} + fM) \cos(\pi \frac{f}{M}) + Tab_i(s + \frac{M}{2} + fM) \sin(\pi \frac{f}{M}) \right\} \\ Tab_i(s + f \cdot \frac{M}{2}) = \frac{1}{2} \left\{ Tab_i(s + fM) + Tab_i(s + \frac{M}{2} + fM) \cos(\pi \frac{f}{M}) - Tab_r(s + \frac{M}{2} + fM) \sin(\pi \frac{f}{M}) \right\} \end{cases} \\ \begin{cases} Tab_r(s + (f+m) \frac{M}{2}) = \frac{1}{2} \left\{ Tab_r(s + fM) - Tab_r(s + \frac{M}{2} + fM) \cos(\pi \frac{f}{M}) - Tab_i(s + \frac{M}{2} + fM) \sin(\pi \frac{f}{M}) \right\} \\ Tab_i(s + (f+m) \frac{M}{2}) = \frac{1}{2} \left\{ Tab_i(s + fM) - Tab_i(s + \frac{M}{2} + fM) \cos(\pi \frac{f}{M}) + Tab_r(s + \frac{M}{2} + fM) \sin(\pi \frac{f}{M}) \right\} \end{cases} \end{aligned}$$

Programme en Pascal

```
{Initialisation}
N:= AnalNb div 2 ; {AnalNb est le nombre T de points de l'intervalle de transformation}
nu:= round(ln(N)/ln(2)) ;
For j:=0 to (N-1) do
begin
  TF_r[j]:= (Canall[AnalDeb +j] + Canall[AnalDeb +j +N])/2 ; {AnalDeb est le n° du premier instant d'analyse}
  TF_i[j]:= 0 ;
  TF_r[j+N]:= (Canall[AnalDeb +j] - Canall[AnalDeb +j +N])/2 ;
  TF_i[j+N]:= 0 ;
end ;

{Calcul de la transformation de Fourier}
m:= 1 ;
For maux:= 1 to nu do
{boucle sur le nombre de points de la transformée connue}
begin
  m:= 2*m ;
  Msur2:= round(N/m) ;
  MM:= 2*Msur2 ;

  For l:=0 to (Msur2 - 1) do
  {boucle sur le numéro de la transformée}
  begin
    For f:=0 to (m-1) do
    {boucle sur la fréquence}
    begin
      TablAux_r[l+f*Msur2]:= 0.5*(TF_r[l+f*MM] + cos(Pi*f/m)*TF_r[l+Msur2+f*MM] + sin(Pi*f/m)*TF_i[l+Msur2+f*MM] ) ;
      TablAux_i[l+f*Msur2]:= 0.5*(TF_i[l+f*MM] + cos(Pi*f/m)*TF_i[l+Msur2+f*MM] - sin(Pi*f/m)*TF_r[l+Msur2+f*MM] ) ;
      TablAux_r[l+(m+f)*Msur2]:= 0.5*(TF_r[l+f*MM] - cos(Pi*f/m)*TF_r[l+Msur2+f*MM] - sin(Pi*f/m)*TF_i[l+Msur2+f*MM] ) ;
      TablAux_i[l+(m+f)*Msur2]:= 0.5*(TF_i[l+f*MM] - cos(Pi*f/m)*TF_i[l+Msur2+f*MM] + sin(Pi*f/m)*TF_r[l+Msur2+f*MM] ) ;
    end ;
  end ;
end ;

{Stockage du résultat}
For f:=0 to 2*N-1 do
begin
  TF_r[f]:= TablAux_r[f] ;
  TF_i[f]:= TablAux_i[f]
end ;
```